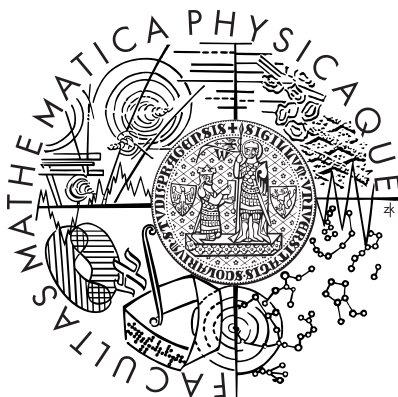


Univerzita Karlova v Praze
Matematicko-fyzikální fakulta

BAKALÁRSKA PRÁCA



Katarína Starinská

Markovské bodové procesy

Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Kateřina Helisová
Študijný odbor: Obecná matematika

2008

Rada by som poďakovala vedúcej mojej práce, Mgr. Kateřine Helisovej, za cenné rady a pripomienky, ktoré mi pri tvorbe pomáhali. Taktiež chcem poďakovať rodičom za ich podporu pri štúdiu.

Prehlasujem, že som svoju bakalársku prácu napísala samostatne a výhradne s použitím citovaných prameňov. Súhlasím so zapožičaním práce a jej zverejňovaním.

V Prahe dňa 25.5.2008

Katarína Starinská

Obsah

1	Úvod do bodových procesov	5
1.1	Definícia bodového procesu	5
1.2	Poissonov bodový proces	6
1.3	Bodové procesy dané hustotou	7
1.4	Bodové procesy s párovými interakciami	9
1.4.1	Príklady bodových procesov s párovými interakciami	10
2	Markovské bodové procesy	13
2.1	Definícia a základné pojmy	13
2.2	Hammersleyho- Cliffordova- Kellyho- Ripleyho veta	14
2.3	Príklady markovských bodových procesov	16
3	Simulácie bodových procesov	18
3.1	Metropolisov- Hastingsov algoritmus pre pevný počet bodov	19
3.2	Metropolisov- Hastingsov algoritmus pre náhodný počet bodov	22
3.3	Konvergencia a vlastnosti Markovových reťazcov	23
3.4	Simulácie bodových procesov	25
	Literatura	30

Názov práce: Markovské bodové procesy

Autor: Katarína Starinská

Katedra: Katedra pravdepodobnosti a matematickej štatistiky

Vedúci bakalárskej práce: Mgr. Kateřina Helisová

e-mail vedoucího: helisova@karlin.mff.cuni.cz

Abstrakt: Markovské bodové procesy sú modely bodových procesov so vzájomným pôsobením bodov. Tieto modely sú konštruované uvažovaním hustoty bodového procesu vzhľadom k Poissonovému procesu a pridaním určitých podmienok zaisťujúcich markovskú vlastnosť. Prvá časť sa zaoberá základnými definíciami týkajúcimi sa bodových procesov, Poissonovým procesom a procesmi danými hustotou. Druhá časť obsahuje markovské bodové procesy a v tretej časti sú simulácie markovských bodových procesov metódou Markov Chain Monte Carlo. Práca je ukončená simuláciou Straussovho procesu.

Klíčová slova: Poissonov bodový proces, markovský bodový proces, Markov Chain Monte Carlo

Title: Markov point processes

Author: Katarína Starinská

Department: Department of Probability and Mathematical Statistics

Supervisor: Mgr. Kateřina Helisová

Supervisor's e-mail address: helisova@karlin.mff.cuni.cz

Abstract: Markov point processes are models for point processes with interacting points. Such models are constructed by considering a density for a point process with respect to a Poisson process and imposing certain conditions ensuring Markov property. The first part deals with basic definitions for point processes, Poisson's point process and point processes with density. The second part is concerned about Markov point processes and in the third part there are simulations of Markov point processes by Markov Chain Monte Carlo methods. This work ends with simulation of a Strauss process.

Keywords: Poisson point process, Markov point process, Markov Chain Monte Carlo

Kapitola 1

Úvod do bodových procesov

1.1 Definícia bodového procesu

Buď \mathcal{B}^d systém borelovských podmnožín \mathbb{R}^d a \mathcal{B}_0^d buď systém omedzených borelovských množín. Ďalej zavedme množinu lokálne konečných konfigurácií $N_{lf} = \{x \subseteq \mathbb{R}^d : n(x_B) < \infty, \forall B \subseteq \mathbb{R}^d, B \text{ omedzená}\}$, kde pre každú podmnožinu $x \subseteq \mathbb{R}^d$ značí symbol $n(x)$ mohutnosť množiny x a $x_B = x \cap B$. Na N_{lf} môžeme zaviesť σ -algebru následujúcim spôsobom:

$$\mathcal{N}_{lf} = \sigma(\{x \in \mathcal{N}_{lf} : n(x_B) = m\} : B \in \mathcal{B}_0^d, m \in \mathbb{N}_0).$$

Definícia 1.1.1. *Bodový proces* X je merateľné zobrazenie z pravdepodobnostného priestoru $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ do $(N_{lf}, \mathcal{N}_{lf})$.

Rozdelenie P_X bodového procesu X je pre $F \in \mathcal{N}_{lf}$

$$P_X(F) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in F\}).$$

Definícia 1.1.2. Pre bodový proces X definujeme *mieru intenzity* predpisom: $\Lambda(X) = EX(B), B \in \mathcal{B}^d$.

Ak existuje hustota ρ miery Λ vzhľadom k Lebesgueovej miere, tak sa ρ nazýva *funkcia intenzity*.

Ak je X stacionárny bodový proces (t.j. pre ľubovoľné $y \in \mathbb{R}^d$ je rozdelenie $X + y = \{x + y : x \in X\}$ rovnaké ako rozdelenie X) s lokálne konečnou mierou intenzity Λ , tak Λ je násobkom Lebesgueovej miery. Funkcia intenzity je potom konštantná a rovná tomuto násobku, ktorý sa nazýva *intenzita stacionárneho bodového procesu*.

1.2 Poissonov bodový proces

Definícia 1.2.1. Nech Λ je difúzna lokálne konečná miera na \mathbb{R}^d a X bodový proces, pre ktorý platí

- (i) $X(B)$ je náhodná veličina s Poissonovým rozdelením s parametrom $\Lambda(B)$ pre všetky $B \in \mathcal{B}_0^d$,
- (ii) $\forall n \in \mathbb{N}$ a $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}_0^d$ po dvoch disjunktné sú $X(B_1), \dots, X(B_n)$ nezávislé náhodné veličiny.

Potom nazveme X *Poissonov bodový proces s mierou intenzity Λ* .

Poissonov bodový proces je základným modelom bodových procesov. Je modelom úplnej nezávislosti bodov.

Veta 1.2.2. *Poissonov bodový proces existuje a je jednoznačne určený mierou intenzity.*

Dôkaz. Prázdne pravdepodobnosti Poissonovho bodového procesu sú

$$P(X(B) = 0) = e^{-\Lambda(B)}.$$

Keďže bodový proces je jednoznačne určený svojimi prázdnyimi pravdepodobnosťami, zostáva nám už len dokázať existenciu.

Nech $0 \in X$ a uvažujme množiny $T_1 = b(0, 1)$ - jednotková guľička so stredom v bode nula a $T_i = b(0, i) \setminus b(0, i-1)$, $i \in \mathbb{N}$. Buďte $N_i \sim \text{Po}(\Lambda(T_i))$ nezávislé. Za podmienky $N_i = n_i$ generujeme binomické bodové procesy $X_i = \{\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,n_i}\}$, $i = 1, 2, \dots$, ktoré sú navzájom nezávislé. Zároveň platí, že $P(\xi_{i,j} \in A | N_i = n_i) = \frac{\Lambda(A)}{\Lambda(T_i)}$.

Položme $X = \cup_{i=1}^{\infty} X_i$. Potom $X(B) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{N_i} \mathbf{1}_{[\xi_{i,j} \in B]}$. Dokážeme, že X je Poissonov bodový proces overením definície.

(i)

$$\begin{aligned} P(X(T_i \cap B) = k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(N_i = n) P(X(T_i \cap B) = k | N_i = n) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Lambda(T_i)^n}{n!} e^{-\Lambda(T_i)} \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)} \right)^k \left(\frac{\Lambda(T_i \setminus B)}{\Lambda(T_i)} \right)^{n-k} \\ &= \frac{e^{-\Lambda(T_i)}}{k!} (\Lambda(T_i \cap B))^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Lambda(T_i \setminus B)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\Lambda(T_i \cap B)^k}{k!} e^{-\Lambda(T_i \cap B)}. \end{aligned}$$

Teda $X(T_i \cap B) \sim \text{Po}(\Lambda(T_i \cap B))$ a $X(B) = \sum_{i: T_i \cap B \neq \emptyset} X(T_i \cap B) \sim \text{Po}(\Lambda(B))$.

- (ii) Nech $A, B \in \mathcal{B}_0$, $A \cap B = \emptyset$. Potom z konštrukcie množín T_i sú $X(T_i \cap A)$ a $X(T_j \cap (B))$ sú nezávislé pre $i \neq j$. Ďalej potrebujeme dokázať nezávislosť pre $i = j$.

$$\begin{aligned}
& P(X(T_i \cap A) = k, X(T_i \cap B) = l) \\
&= \sum_{n=k+l}^{\infty} P(N_i = n) P(X(T_i \cap A) = k, X(T_i \cap B) = l | N_i = n) \\
&= \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{\Lambda(T_i)^n}{n!} e^{-\Lambda(T_i)} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} \left(\frac{\Lambda(T_i \cap A)}{\Lambda(T_i)} \right)^k \left(\frac{\Lambda(T_i \cap B)}{\Lambda(T_i)} \right)^l \\
&\quad \left(\frac{\Lambda(T_i \setminus (A \cup B))}{\Lambda(T_i)} \right)^{n-k-l} \\
&= e^{-\Lambda(T_i)} \frac{\Lambda(T_i \cap A)^k}{k!} \frac{\Lambda(T_i \cap B)^l}{l!} \sum_{n=k+l}^{\infty} \frac{\Lambda(T_i \setminus (A \cup B))^{n-k-l}}{(n-k-l)!} \\
&= \frac{\Lambda(T_i \cap A)^k}{k!} e^{-\Lambda(T_i \cap A)} \frac{\Lambda(T_i \cap B)^l}{l!} e^{-\Lambda(T_i \cap B)} \\
&= P(X(T_i \cap A) = k) P(X(T_i \cap B) = l).
\end{aligned}$$

□

1.3 Bodové procesy dané hustotou

Pozrime sa ako vyzerá rozdelenie Poissonovho bodového procesu X s mierou intenzity Λ :

$$\begin{aligned}
\Pi(U) &= P(X \in U) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X(\mathbb{R}^d) = n) P(X \in U | X(\mathbb{R}^d) = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(\mathbb{R}^d)^n}{n!} e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\{x_1, \dots, x_n\} \in U]} \frac{\Lambda(dx_1)}{\Lambda(\mathbb{R}^d)} \cdots \frac{\Lambda(dx_n)}{\Lambda(\mathbb{R}^d)} \\
&= e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} [\mathbf{1}_{[\emptyset \in U]} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\{x_1, \dots, x_n\} \in U]} \Lambda(dx_1) \cdots \Lambda(dx_n)].
\end{aligned}$$

Definícia 1.3.1. Bodový proces X na \mathbb{R}^d s hustotou f vzhľadom k Poissonovému procesu je taký bodový proces, že jeho rozdelenie má tvar

$$\begin{aligned} P(X \in U) &= \int_{N_{lf}} f(x) \Pi(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-|\mathbb{R}^d|}}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{[\{x_1, \dots, x_n \in U\}]} f(\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1, \dots, dx_n, \end{aligned}$$

pre $U \in \mathcal{N}_{lf}$, kde nultým členom sumy rozumieme $e^{-|\mathbb{R}^d|} \mathbf{1}_{[\emptyset \in U]} f(\emptyset)$.

Poznámka 1.3.2. Hustota f sa často uvádza v tvare $f(x) = \alpha h(x)$, kde $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je známa funkcia a

$$\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-|\mathbb{R}^d|)}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \cdots \int_{\mathbb{R}^d} h(\{x_1, \dots, x_n\}) dx_1, \dots, dx_n$$

je normovacia konštanta. Táto konštanta je pre naše modely neznáma až na niektoré špeciálne prípady.

Zadefinujme si zopár základných pojmov pre bodové procesy.

Definícia 1.3.3. *Papangelouova podmienená intenzita* bodového procesu X s hustotou f je definovaná vzorcom

$$\lambda(x, \xi) = \frac{f(x \cup \xi)}{f(x)}, \quad x \in N_{lf}, \xi \in S \setminus x,$$

pričom výraz $a/0$ položíme rovný nule pre $a \geq 0$.

Hovoríme, že proces X je *priťažlivý*, ak platí $\lambda(x, \xi) \leq \lambda(y, \xi)$ pre $x \subset y$, a *odpudivý*, ak platí $\lambda(x, \xi) \geq \lambda(y, \xi)$ pre $x \subset y$.

Poznámka 1.3.4. Všimnime si, že Papangelouova podmienená intenzita vôbec nezávisí na normovacej konštante hustoty f .

Definícia 1.3.5. Nech je daná funkcia $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$. Funkcia h sa nazýva *Ruelle stabilná*, ak existuje funkcia $\phi^* : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty)$ taká, že $c^* = \int_{\mathbb{R}^d} \phi^*(\xi) d\xi < \infty$ a ak pre nejakú kladnú konštantu $\alpha > 0$ a pre všetky $x \in N_{lf}$ platí

$$h(x) \leq \alpha \prod_{\xi \in x} \phi^*(\xi).$$

Ak pre h platí, že

$$h(x \cup \xi) \leq \phi^*(\xi)h(x) \quad \forall x \in N_{lf}, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus x,$$

potom sa h nazýva *lokálne stabilná*.

Veta 1.3.6. Ak $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je lokálne stabilná, tak je aj Ruelle stabilná.

Dôkaz. Z definície lokálnej stability platí $h(x \cup \xi) \leq \phi^*(\xi)h(x)$. Zároveň platí, že $\phi^*(\xi)h(x) \leq \phi^*(\xi)\phi^*(\eta)h(x \setminus \eta)$. Takto pokračujeme ďalej a dostávame, že $h(x \cup \xi) \leq \prod_{\xi \in x} \phi^*(\xi)h(\emptyset)$. Označením $\alpha = h(\emptyset)$ dostaneme definíciu Ruelle stability. \square

1.4 Bodové procesy s párovými interakciami

Definícia 1.4.1. Bodový proces s párovými interakciami nazveme taký bodový proces, ktorý má hustotu f vzhľadom k rozdeleniu Poissonovho procesu tvaru

$$f(x) = \alpha \prod_{\xi \in x} \phi(\xi) \prod_{\{\xi, \eta \subseteq x\}} \phi(\{\xi, \eta\}),$$

kde $\phi : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je interakčná funkcia a α normovacia konštanta.

Rozsah interakcií je definovaný ako

$$R = \inf\{r > 0 : \forall (\xi, \eta) \subset \mathbb{R}^d, \|\eta - \xi\| > r : \phi(\{\xi, \eta\}) = 1\}.$$

Bodový proces s párovými interakciami sa nazýva *homogénny*, ak výraz $\phi(\xi)$ je konštantný a zároveň výraz $\phi(\{\xi, \eta\})$ je invariantný voči posunutiam a rotáciám (závisí len na $\|\xi - \eta\|$).

Všimnime si, ako je to s pojmi, ktoré sme zaviedli vyššie. Procesy s párovými interakciami sú zrejme dedičné ($f(x) > f(y)$ pre každé $y \subset x$). Predpokládajme $f(x) > 0$ a $\xi \notin x$, potom Papangelouova podnietená intenzita je

$$\lambda(x, \xi) = \frac{\alpha \prod_{\eta \in x \cup \xi} \phi(\eta) \prod_{\{\eta, \zeta\} \subseteq x \cup \xi} \phi(\{\eta, \zeta\})}{\alpha \prod_{\eta \in x} \phi(\eta) \prod_{\{\eta, \zeta\} \subseteq x} \phi(\{\eta, \zeta\})} = \phi(\xi) \prod_{\eta \in x} \phi(\{\xi, \eta\}).$$

Ďalej vidíme, že tieto procesy sú odpudivé ak platí, že $\phi(\{\xi, \eta\}) \leq 1$. Ak navyše $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\xi) d\xi < \infty$, tak sú tieto procesy aj lokálne stabilné.

Definícia 1.4.2. Bud' $n \in \mathbb{N}$ pevné. Proces $X|n(X) = n$ sa nazýva *podmienený bodový proces s párovými interakciami*, ak podmienená hustota procesu pri pevnom počte bodov n má tvar

$$f_n(x) = \frac{1}{c_n} \prod_{\xi \in x} \phi(\xi) \prod_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} \phi(\{\xi, \eta\}).$$

Narozdiel od obyčajných bodových procesov s párovými interakciami, môže byť normovacia konštanta konečná aj v prípade, že $\phi(\{\xi, \eta\}) > 1, \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^d$.

1.4.1 Príklady bodových procesov s párovými interakciami

V tejto časti budeme skúmať homogénne bodové procesy. Označme preto $\phi(\{\xi, \eta\}) = \phi_2(\|\xi - \eta\|)$, kde $\phi_2 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$.

Príklad 1.4.3. Najjednoduchší netriviálny bodový proces s párovými interakciami sa nazýva *Straussov proces*, kde

$$\phi_2(r) = \gamma^{\mathbf{1}_{[r \leq R]}}.$$

Pričom výraz $0^0 = 1$, γ je parameter vzájomného pôsobenia bodov procesu a $R > 0$ je rozsah interakcií. Hustota Straussovho procesu má tvar

$$f(x) = \alpha \beta^{n(x)} \gamma^{s_R(x)},$$

kde $\beta > 0$ a $s_R(x) = \sum_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} \mathbf{1}_{\|\xi - \eta\| \leq R}$ je počet dvojíc bodov, ktoré majú od seba vzdialenosť najviac R . Aby bol proces dobre definovaný, je $0 \leq \gamma \leq 1$. Straussov proces sa zavádza aj pre $\gamma > 1$, kedy odpovedá modelu shlukovania, ale hustota nie je integrovateľná. Vezmime množinu $A \subset \mathbb{R}^d$ takú, že $\Lambda(A) > 0$ a jej diameter je menší než R . Potom

$$\begin{aligned} e^{\Lambda(\mathbb{R}^d)} & \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}^d} \dots \int_{\mathbb{R}^d} \alpha \beta^n \gamma^{s_R(\{x_1, \dots, x_n\})} \Lambda(dx_1) \dots \Lambda(dx_n) \right] \\ & \geq e^{\Lambda(\mathbb{R}^d)} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_A \dots \int_A \alpha \beta^n \gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda(dx_1) \dots \Lambda(dx_n) \right] \\ & = e^{-\Lambda(\mathbb{R}^d)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \alpha \beta^n \gamma^{\frac{n(n-1)}{2}} \Lambda(A)^n = \infty. \end{aligned}$$

Ak položíme $\gamma = 1$, dostaneme Poissonov bodový proces s mierou intenzity $\beta\Lambda$. V tomto prípade nenastáva žiadne vzájomné pôsobenie medzi bodmi procesu. Pre $\gamma < 1$ je podmienený Straussov proces odpudivý a pre $\gamma = 0$ dostaneme proces, kde vzdialenosť bodov je minimálne R . Takýto proces sa nazýva proces s pevným jadrom R .

Príklad 1.4.4. Pre pevný počet bodov $n(x) = n$ definujeme *podmienený Straussov proces* hustotou

$$f_n(x) = \alpha \gamma^{s_R(x)},$$

kde $\gamma \geq 0$ a s_R je rovnaké ako v predošlom príklade.

Príklad 1.4.5. Ďalším príkladom je *viacmerítkový proces*, kde

$$\phi_2(r) = \gamma_i, \quad R_{i-1} < r \leq R_i,$$

$$0 = R_0 < R_1 < \dots < R_k < R_{k+1} = \infty, k \in \mathbb{N}, \gamma_i \geq 0, i = 1, \dots, k, \gamma_{k+1} = 1.$$

Hustota procesu má tvar

$$f(x) = \alpha \beta^{n(x)} \prod_{i=1}^k \gamma_i^{s_i(x)},$$

kde $\beta > 0$ a $s_i(x) = \sum_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} \mathbf{1}_{[R_{i-1} < \|\xi - \eta\| \leq R_i]}$. Rozsah interakcií je $R = R_k$.

Špeciálny prípad viacmerítkového procesu je Straussov proces a to pre $k = 1$ a $0 \leq \gamma_1 \leq 1$. Aby bola zaručená integrovateľnosť pre $k \geq 2$, musí byť splnená jedna z nasledujúcich podmienok:

$$(i) \quad 0 < \gamma_1 \leq 1 \text{ a } 0 \leq \gamma_2 \leq 1, \dots, 0 \leq \gamma_k \leq 1,$$

$$(ii) \quad \gamma_1 = 1 \text{ a } \gamma_2 \geq 0, \dots, \gamma_k \geq 0.$$

Ak je splnená podmienka (i), jedná sa o odpudivý a teda lokálne stabilný proces. Ak je splnená podmienka (ii) dostaneme proces s pevným jadrom R_1 . Keďže pre $\gamma_1 = 0$, existuje n_0 také, že pre každé $n(x) > n_0$ je $f(x) = 0$, tak Papangelouova podmienená intenzita $\lambda(x \cup \xi) \leq \beta \prod_{i=2}^k \max\{1, \gamma_i\}^{n_0-1}$, takže dostávame opäť lokálne stabilný proces.

Príklad 1.4.6. Ďalšími príkladmi procesov s párovými interakciami sú

- proces s lineárne sa meniacimi interakciami:

$$\phi_2(r) = \mathbf{1}_{[r \leq R]} \frac{r}{R},$$

- proces prekrývajúcich sa plôch:

$$\phi_2(r) = \gamma^{|b(\xi, \frac{R}{2}) \cup b(\eta, \frac{R}{2})|}, \quad r = \|\xi - \eta\|, 0 \leq \gamma \leq 1, r \leq R.$$

Tieto procesy majú konečný rozsah interakcií R , sú odpudivé a preto lokálne stabilné.

Príklad 1.4.7. Ak položíme

$$\phi_2(r) = 1 - \exp(-(r/\theta)^2), \text{ kde } \theta > 0$$

dostaneme *proces s veľmi mäkkým jadrom*, ktorý je príkladom procesu s nekonečným rozsahom interakcií. Je taktiež odpudivý a lokálne stabilný.

Príklad 1.4.8. Nekonečný rozsah interakcií má aj *Lennard-Jonesov proces*, pre ktorý

$$\phi_2(r) = \exp(\alpha_1(\sigma/r)^6 - \alpha_2(\sigma/r)^{12}),$$

kde $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 > 0, \sigma > 0$. Pre $\alpha_1 = 0$ je odpudivý, zatiaľ čo pre $\alpha_1 > 0$ nie je ani odpudivý ani priťažlivý, pretože pre $r > r_0$ je $\phi_2(r) > 1$ a pre $r < r_0$ je $\phi_2(r) < 1$, pričom $r_0 = \sigma \sqrt[6]{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}$. Tiež vidíme, že hustota tohto procesu nie je lokálne stabilná, pretože Papangelouova podmienená intenzita $\lambda(x, \xi) = \beta \prod_{\eta \in x} \phi_2(\|\xi - \eta\|)$ nie je omedzená. Je však Ruelle stabilná.

Kapitola 2

Markovské bodové procesy

2.1 Definícia a základné pojmy

Definícia 2.1.1. Reflexivná a symetrická relácia na \mathbb{R}^d budeme nazývať *susedstvo* a značiť \sim .

Hovoríme, že $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ sú susedia, ak $\xi \sim \eta$. Definujeme množinu

$$N_\xi = \{\eta \in \mathbb{R}^d : \eta \sim \xi\},$$

ktorú budeme nazývať *susedstvo bodu* ξ .

Intuitívne *susedstvo množiny* $B \subseteq \mathbb{R}^d$ je

$$N_B = \cup_{\xi \in B} N_\xi = \{\xi \in \mathbb{R}^d : \exists \eta \in B \text{ tak, že } \xi \sim \eta\}.$$

Poznámka 2.1.2. Najčastejšie používanou reláciou susedstva je *R-susedstvo*, teda $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$ sú susedia $\Leftrightarrow \|\xi - \eta\| \leq R$ pre dané $R \geq 0$.

Definícia 2.1.3. Funkcia $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je *dedičná*, ak pre každé $x \in N_{lf}$ platí: $h(x) > 0 \Rightarrow h(y) > 0$ pre každé $y \subseteq x$.

Definícia 2.1.4. Nech $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je merateľná funkcia. h je *markovská* vzhľadom k relácii \sim , ak je dedičná a platí, že pre každé $x \in N_{lf}$ také, že $h(x) > 0$ a každé $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus x$, $\frac{h(x \cup \xi)}{h(x)}$ závisí len na ξ a $x \cap N_\xi$.

Definícia 2.1.5. Bodový proces nazveme *markovský bodový proces*, ak jeho hustota vzhľadom k Poissonovmu procesu je markovská.

Ďalej budeme uvažovať $\lambda(x, \xi) = \frac{h(x \cup \xi)}{h(x)}$ pre $h(x) > 0$, kde $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je ľubovoľná merateľná funkcia a $\lambda(x, \xi) = 0$ inak. Vidíme, že pre

markovské bodové procesy závisí $\lambda(x, \xi)$ iba na susedoch ξ , teda závisí na "lokálnej informácii". Preto hovoríme, že markovský bodový proces splňuje *lokálnu markovskú vlastnosť*.

2.2 Hammersleyho- Cliffordova- Kellyho- Ripleyho veta

Trieda markovských funkcií je charakterizovaná *Hammersleyho- Cliffordovou- Kellyho- Ripleyho vetou*, pričom sa požaduje, aby existovala reflexivná a symetrická relácia. Predtým ako ju sformulujeme a dokážeme, definujeme si ešte jeden pojem.

Definícia 2.2.1. Hovoríme, že funkcia $\phi : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je *interakčná funkcia*, ak $\phi(x) = 1$ práve ak existujú body $\xi, \eta \in x$ také, že $\xi \approx \eta$.

Veta 2.2.2. (*Hammersleyho- Cliffordova- Kellyho- Ripleyho veta*) *Mera-
tel'ná funkcia $h : N_{lf} \rightarrow [0, \infty)$ je markovská práve vtedy, ak existuje inter-
akčná funkcia ϕ taká, že*

$$h(x) = \prod_{y \subseteq x} \phi(y), \quad x \in N_{lf}. \quad (2.1)$$

Potom pre $h(x) > 0$ platí

$$\lambda(x, \xi) = \prod_{y \subseteq x} \phi(y \cup \xi), \quad x \in N_{lf}, \xi \in \mathbb{R}^d \setminus x.$$

Dôkaz. Nech $h(x) = \prod_{y \subseteq x} \phi(y)$, potom $\lambda(x, \xi) = \frac{h(x \cup \xi)}{h(x)} = \prod_{y \subseteq x} \phi(y \cup \xi)$. Vidíme, že $\lambda(x, \xi)$ závisí iba na $x \cap \xi$, teda je splnená lokálna markovská vlastnosť. Zrejme je funkcia h dedičná a teda je markovská.

Naopak, predpokladáme, že h je markovská. Definujme indukčne $\phi(\emptyset) = h(\emptyset)$, $\phi(x) = 1$ ak existujú $\xi, \eta \in x$ také, že $\xi \approx \eta$ a

$$\phi(x) = \frac{h(x)}{\prod_{y \subset x} \phi(y)}$$

inak, pričom predpokladáme, že $\frac{0}{0} = 1$. ϕ je teda interakčná funkcia. Aby sme dokázali, že h je tvaru (2.1), rozdelíme dôkaz na tri prípady.

1)Nech $h(x) = 0$ a $\prod_{y \subset x} \phi(y) = 0$: Keďže $\prod_{y \subset x} \phi(y) = 0$, tak existuje $y \subset x$ taká, že $\phi(y) = 0$. Teda $h(y) = 0$. Vzhľadom na to, že funkcia h je dedičná, tak $h(x) = 0 = \prod_{y \subseteq x} \phi(y)$.

2)Nech $h(x) = 0$ a $\prod_{y \subset x} \phi(y) > 0$: Potom $\lambda(x \setminus \kappa, \kappa) = \frac{h(x)}{h(x \setminus \kappa)} = 0$ pre všetky $\kappa \in x$ a $h(y) > 0$ pre každé $y \subset x$ také, že $\lambda(x \setminus \{\kappa, \zeta\}, \zeta) > 0$ pre všetky $\{\kappa, \zeta\} \subseteq x$. Nech existujú $\xi, \eta \in x$ také, že $\xi \asymp \eta$. Vzhľadom na to, že h je markovská funkcia, muselo by platiť, že

$$0 = \lambda(x \setminus \eta, \eta) = \lambda(x \setminus \{\xi, \eta\}, \eta) > 0.$$

Teda $\phi(x) = 0$ a $h(x) = 0 = \prod_{y \subseteq x} \phi(y)$.

3)Nech $h(x) > 0$: Z dedičnosti funkcie h platí, že $h(y) > 0$ pre každé $y \subseteq x$. Ak by všetky $\xi, \eta \in x$ boli susedia, tak vzorec (2.1) platí z definície $\phi(x)$. Predpokladajme, že existujú $\xi, \eta \in x$ také, že $\xi \asymp \eta$ a položíme $y = x \setminus \{\xi, \eta\}$. Postupujme indukciou podľa $n = n(x)$.

Pre $n = 0$ platí triviálne $h(\emptyset) = \phi(\emptyset)$.

Nech vzorec (2.1) platí pre $n - 1$. Potom

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{h(y \cup \{\xi, \eta\})}{h(y \cup \{\xi\})} h(y \cup \{\xi\}) = \frac{h(y \cup \{\eta\})}{h(y)} h(y \cup \{\xi\}) \\ &= \frac{\prod_{a \subseteq y \cup \{\eta\}} \phi(a) \prod_{b \subseteq y \cup \{\xi\}} \phi(b)}{\prod_{c \subseteq y} \phi(c)} = \prod_{a \subseteq y \cup \{\xi, \eta\}} \phi(a), \end{aligned}$$

kde $\phi(y) = 1$ ak $\{\xi, \eta\} \subseteq y$.

□

Poznámka 2.2.3. Podľa (2.1) je hustota markovského bodového procesu tvaru

$$f(x) = \prod_{y \subseteq x} \phi(y) = \phi(\emptyset) \exp \left\{ \sum_{y \subseteq x: y \neq \emptyset} \log \phi(y) \right\} = \phi(\emptyset) \exp \{-U(x)\}.$$

V štatistickej fyzike sa tento proces nazýva *Gibbsov bodový proces* s energiou

$$U(x) = - \sum_{y \subseteq x: y \neq \emptyset} \log \phi(y)$$

a partičnou funkciou $Z = \frac{1}{\phi(\emptyset)}$.

2.3 Príklady markovských bodových procesov

Najjednoduchším príkladom sú procesy s párovými interakciami, ktoré sú často odpudivé ako sme si už ukázali.

Príklad 2.3.1. *Widomov- Rowlinsonov proces*(proces objemových interakcií) je daný hustotou

$$f(x) = \alpha \beta^{n(x)} \gamma^{-|U_{x,R}|},$$

kde $U_{x,R} = \cup_{\xi \in x} b(\xi, R)$, $\beta > 0$, $R > 0$, $\gamma > 0$ a α je normovacia konštanta. Tento proces je markovský vzhľadom k relácii 2R-susedstva, pretože

$$\begin{aligned} \lambda(x, \xi) &= \frac{\alpha \beta^{n(x)+1} \gamma^{-|U_{x \cup \xi, R}|}}{\alpha \beta^{n(x)} \gamma^{-|U_{x,R}|}} = \beta \gamma^{-|b(\xi, R) \setminus \cup_{\eta \in x} b(\eta, R)|} \\ &= \beta \gamma^{-|b(\xi, R) \setminus \cup_{\eta \in x: \|\xi - \eta\| \leq 2R} b(\eta, R)|}. \end{aligned}$$

Proces je odpudivý pre $0 < \gamma \leq 1$ a priťažlivý pre $\gamma \geq 1$. Pre $\gamma \geq 1$ je $\lambda(x, \xi) \leq \beta$ a pre $0 < \gamma \leq 1$ je $\lambda(x, \xi) \leq \beta \gamma^{-|b(x, R)|}$. Pozrime sa ešte ako vyzerá interakčná funkcia z predošlej vety. Pomocou princípu inklúzie a exklúzie platí

$$|U_{x,R}| = \sum_{y \subseteq x: y \neq \emptyset} (-1)^{n(y)+1} |\cap_{\xi \in y} b(\xi, R)|,$$

takže

$$\gamma^{-|U_{x,R}|} = \prod_{y \subseteq x: y \neq \emptyset} \gamma^{(-1)^{n(y)+1} |\cap_{\xi \in y} b(\xi, R)|} = \prod_{y \subseteq x: y \neq \emptyset} \phi(y).$$

Príklad 2.3.2. *Geyerov proces s trojnými interakciami* s hustotou

$$f(x) = \alpha \beta^{n(x)} \gamma^{s_R(x)} \delta^{t_R(x)},$$

kde $s_R(x) = \sum_{\{\xi, \eta\} \subseteq x} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R]}$ rovnako ako v Straussovom procese a

$$t_R(x) = \sum_{\{\xi, \eta, \kappa\} \subseteq x} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R, \|\xi - \kappa\| \leq R, \|\eta - \kappa\| \leq R]}.$$

Ďalej $\beta > 0$ a pre parametre γ a δ musí byť spnená jedna z nasledujúcich podmienok:

- (i) $0 \leq \gamma \leq 1$ a $0 \leq \delta \leq 1$,
- (ii) $\gamma > 1$ a $0 < \delta < 1$.

Proces je lokálne stabilný a taktiež markovský vzhľadom k R -susedstvu. Interakčná funkcia z vety 2.2.2 má tvar $\phi(\xi) = \beta$, $\phi(\{\xi, \eta\}) = \gamma \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R]}$, $\phi(\{\xi, \eta, \kappa\}) = \delta \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R, \|\xi - \kappa\| \leq R, \|\eta - \kappa\| \leq R]}$ a $\phi(y) = 1$ pre $n(y) \geq 4$. Nech $y \subseteq x$, potom

$$\frac{\lambda(x, \xi)}{\lambda(y, \xi)} = \gamma^{\sum_{\eta \in x \setminus y} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R]}} \delta^{\sum_{\{\eta, \kappa\} \subseteq x \setminus y} \mathbf{1}_{[\|\xi - \eta\| \leq R, \|\xi - \kappa\| \leq R, \|\eta - \kappa\| \leq R]}}.$$

Teda pre prípad (i) je proces odpudivý, zatiaľčo pre prípad (ii) nie je odpudivý ani priťažlivý.

Kapitola 3

Simulácie bodových procesov

Našou úlohou v tejto kapitole je popísať si niekoľko simulačných algoritmov. Aj naďalej bude X značiť bodový proces s hustotou h vzhľadom k Poissonovmu procesu a s rozdelením π . Ďalej označme $E = \cup_{n=0}^{\infty} E_n$ stavový priestor, kde pre $B \subset \mathbb{R}^d$ je $E_n = \{x \in B^n : n(X) = n, \pi(x) > 0\}$ a ε buď σ -algebra na E .

Definícia 3.0.3. *Markovov reťazec* je postupnosť náhodných premenných Y_0, Y_1, \dots taká, že podmienené rozdelenie Y_{m+1} pri (Y_0, \dots, Y_m) je rovnaké ako podmienené rozdelenie Y_{m+1} za podmienky Y_m .

Na simuláciu použijeme *Markov chain Monte Carlo metódu* (MCMC). MCMC je algoritmus generovania Markovovho reťazca Y_0, Y_1, \dots na $B \subset \mathbb{R}^d$ s ľubovoľným počiatočným rozdelením a prechodovým jadrom $P(x, A)$, ktorý konverguje v distribúcii k rozdeleniu skúmaného procesu, čo je v našom prípade rozdelenie procesu X . Prechodové jadro $P(x, A)$ určuje pravdepodobnosť prechodu zo stavu x do stavu v množine A , pričom pre každé $A \in \varepsilon$ je $P(\cdot, A)$ nezáporná merateľná funkcia na E a pre každé $x \in E$ je $P(x, \cdot)$ pravdepodobnostná miera na ε . Ďalej predpokládame, že P je markovské jadro. Budeme rozlišovať dva prípady,

- (a) proces s pevným počtom bodov $n = n(X)$,
- (b) proces s náhodným počtom bodov.

Definícia 3.0.4. MCMC reťazec je *reverzibilný* vzhľadom k cieľovému rozdeleniu, ak platí: ak sa Y_m riadi cieľovým rozdelením, tak (Y_m, Y_{m+1}) a (Y_{m+1}, Y_m) majú rovnaké rozdelenie.

Definícia 3.0.5. Reťazec Y_0, Y_1, \dots je *nerozložiteľný*, ak existuje nemulová miera ϕ na ε taká, že $\phi(A) > 0 \Rightarrow \forall x \in E \exists n : P^n(x, A) > 0$, kde

$$P^n(x, A) = \int_E P^{n-1}(y, A) P(x, dy)$$

je prechodové jadro n -tého rádu.

Nerozložiteľnosť reťazca znamená, že Markovov reťazec môže nadobudnúť akéhokoľvek stavu bez ohľadu na to, kde začal. Ak je reťazec nerozložiteľný a reverzibilný vzhľadom k cieľovému rozdeleniu, tak v prípade, že rozdelenie reťazca konverguje, tak konverguje k cieľovému rozdeleniu.

3.1 Metropolisov- Hastingsov algoritmus pre pevný počet bodov

Predpokládajme, že máme daný pevný počet bodov $n(X) = n$, kde $n \geq 1$. Teda stavový priestor je $E = E_n$. Chceme simulovať z podmienenej hustoty h_n . Usporiadajme n bodov X_1, \dots, X_n z X a uvažujme hustotu (X_1, \dots, X_n) danú ako

$$\pi(x_1, \dots, x_n) = h_n(\{x_1, \dots, x_n\}),$$

kde pre jednoduchosť predpokládame, že niektoré body môžu byť rovnaké. Tento predpoklad nie je nutný, pretože s pravdepodobnosťou jedna budú body X_1, \dots, X_n navzájom rôzne.

Generujeme Markovov reťazec Y_0, Y_1, \dots . Pre každé $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$ a každé $i \in \{1, \dots, n\}$, je na B daná *návrhová hustota* $q_i(\bar{x}, \cdot)$. Ďalej definujeme *Hastingsov pomer*

$$r_i(\bar{x}, \xi) = \frac{h_n((x \setminus x_i) \cup \xi)}{h_n(x)} \frac{q_i((x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n), x_i)}{q_i(\bar{x}, \xi)},$$

pre $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ a $\xi \in B$, pričom $\frac{a}{0} = 1$ pre všetky $a \geq 0$. Nech súčasný stav reťazca je $Y_m = \bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Potom navrhujeme vymeniť rovnomerne náhodne vybraný bod x_i z \bar{x} bodom ξ , ktorý vznikol z rozdelenia a hustotou $q_i(\bar{x}, \cdot)$. S pravdepodobnosťou

$$\alpha_i(\bar{x}, \xi) = \min\{1, r_i(\bar{x}, \xi)\}$$

príjmeme návrh a položíme $Y_{m+1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)$, inak položíme $Y_{m+1} = \bar{x}$. Ak nepodmienený proces je markovský, tak vidíme, že v Hastingsovom pomere jedna časť závisí len na lokálnej informácii

$$\frac{h_n((x \setminus x_i) \cup \xi)}{h_n(x)} = \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi)}{\lambda(x \setminus x_i, x_i)}.$$

Problémom však je ako čo najlepšie generovať Y_0 . Obecne algoritmus funguje, ak Y_0 je realizácia binomického bodového procesu, alebo ak je vybrané tak, že $\pi(Y_0) > 0$.

Formálny zápis algoritmu:

Algoritmus 3.1.1. Pre $m = 0, 1, \dots$ buď $Y_m = \bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in B^n$ a $x = \{x_1, \dots, x_n\}$. Potom Y_{m+1} zostroj nasledovne:

- (i) vygeneruj $I_m \sim \text{Uniform}(\{1, \dots, n\})$ a $R_m \sim \text{Uniform}([0, 1])$ a pre $I_m = i$, vytvor $\xi_m \sim q_i(\bar{x}, \cdot)$;
- (ii) pre $I_m = i$ polož $Y_{m+1} = (x_1, \dots, x_{i-1}, \xi_m, x_{i+1}, \dots, x_n)$, ak $R_m \leq r_i(\bar{x}, \xi_m)$, inak $Y_{m+1} = \bar{x}$.

Pričom $I_m, R_m, m = 0, 1, \dots$, sú navzájom nezávislé a pre dané I_m, Y_m je ξ_m podmienene nezávislé na R_m a všetkých premenných vytvorených v predošlých krokoch generovania Y_0, \dots, Y_m .

Namiesto náhodného generovania I_m môžeme voliť hodnoty systematicky, napríklad: $I_0 = 1, I_1 = 2, \dots, I_{n-1} = n, I_n = 1, I_{n+1} = 2, \dots, I_{2n-1} = n, \dots$, alebo $I_0 = 1, I_1 = 2, \dots, I_{n-1} = n, I_n = n, I_{n+1} = n-1, \dots, I_{2n-1} = 1, \dots$.

Špeciálnym prípadom tohto algoritmu je *Metropolisov algoritmus*, kde $q_i(\bar{x}, \cdot)$ závisí iba na x_i a $q_i(x_i, \xi) = q_i(\xi, x_i)$. Hastingsov pomer má v tom prípade tvar

$$r_i(\bar{x}, \xi) = \frac{h_n((x \setminus x_i) \cup \xi)}{h_n(x)} \frac{q_i(\xi, x_i)}{q_i(x_i, \xi)} = \frac{h_n((x \setminus x_i) \cup \xi)}{h_n(x)}, \quad q_i(\xi, x_i) > 0.$$

Zvyčajne $q_i(x_i, \xi) \propto \mathbf{1}_{[\xi \in N_{x_i}]}$, kde $N_{x_i} \in \mathbb{R}^d$ značí susedstvo bodu x_i , $|N_{x_i}| > 0$ a ak $\xi \in N_{x_i}$, tak $x_i \in N_\xi$. Môže sa stať, že N_{x_i} obsahuje body mimo B , v tom prípade definujeme $\pi(\bar{y}) = 0$ pre \bar{y} také, že obsahuje bod $y_i \notin B$.

V následujúcom algoritme predpokladajme, že pre každé $i = 1, 2, \dots, n$ a pre všetky $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E_n$ je pre $\bar{X}_{-i} = (X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n)$ marginálna hustota daná vzťahom

$$\pi_{-i}(\bar{x}_{-i}) = \int_B \pi(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n) d\xi$$

striktne nenulová a definujme podmienenú hustotu X_i za podmienky, že $\bar{X}_{-i} = \bar{x}_{-i}$ ako

$$\pi_i(x_i | \bar{x}_{-i}) = \frac{\pi(\bar{x})}{\pi_{-i}(\bar{x}_{-i})}.$$

Pre $\bar{x} \notin E_n$ značí $\pi_i(\cdot | \bar{x}_{-i})$ hustotu pre X_i .

Ďalší prípad Metropolisovho- Hastingsovho algoritmu je *Gibbsov výberový plán*, v ktorom pre každé $i = 1, \dots, n$ je $q_i(\bar{x}, \cdot) = \pi_i(\cdot | \bar{x}_{-i})$. Pre pevné $\bar{x} \in E_n$ je $\pi_i(\xi | \bar{x}_{-i}) = \frac{h((x \setminus x_i) \cup \xi)}{\pi_{-i}(\bar{x}_{-i})}$ a $r_i = 1$, teda nie je potrebné generovať R_m . Špeciálne pre Markovský bodový proces, $\pi_i(\cdot | \bar{x}_{-i})$ závisí iba na lokálnej informácii. Simulácia z podmienenej hustoty často obsahuje *zamietací výber*:

Nech je splnená podmienka lokálnej stability $\lambda(x, \xi) \leq \phi^*(\xi)$ a nech $0 < c^* < \infty$, kde $c^* = \int_B \phi^*(\xi) d\xi$. Nech máme $Y_m = \bar{x} \in E_n$ a $I_m = i$. Generujme ďalej Y_{m+1} tak, že v algoritme 3.1.1 nahradíme krok (i) týmto krokom:

Pre $j = 1, 2, \dots$ generujeme $\xi_{jm} \sim \phi^*(\cdot)/c^*$ a $R_{jm} \sim \text{Uniform}([0,1])$ až kým prvýkrát $R_{jm} \leq \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi_{jm})}{\phi^*(\xi_{jm})}$. Potom polož $\xi_m = \xi_{jm}$, pričom ξ_{jm}, R_{jm} pre $j = 1, 2, \dots, m = 0, 1, \dots$ sú navzájom nezávislé.

Veta 3.1.2. *Nech*

$$J = \inf \left\{ j : R_{jm} \leq \frac{\lambda(x, \xi_{jm})}{\phi^*(\xi_{jm})} \right\} - 1$$

značí počet krokov pred prijatím, potom má J geometrické rozdelenie s parametrom

$$a(x \setminus x_i) = \frac{1}{c^*} \int_B \lambda(x \setminus x_i, \xi) d\xi.$$

Dôkaz. Vzhľadom na to, že $(\xi_{jm}, R_{jm}), j = 1, 2, \dots$, sú nezávislé rovnako

rozdelené, tak pravdepodobnosť prijatia je

$$\begin{aligned}
P\left(\xi_{jm} \in B, R_{jm} \leq \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi_{jm})}{\phi^*(\xi_{jm})}\right) &= \int_B \int_0^1 \mathbf{1}_{\left[\xi \in B, r_{jm} \leq \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi)}{\phi^*(\xi)}\right]} dr_{jm} d\xi \\
&= \int_B \int_0^1 \mathbf{1}_{\left[r_{jm} \leq \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi)}{\phi^*(\xi)}\right]} dr_{jm} \frac{\phi^*(\xi)}{c^*} d\xi = \int_B \frac{\phi^*(\xi)}{c^*} \frac{\lambda(x \setminus x_i, \xi)}{\phi^*(\xi)} d\xi \\
&= \frac{1}{c^*} \int_B \lambda(x \setminus x_i, \xi) d\xi.
\end{aligned}$$

□

3.2 Metropolisov- Hastingsov algoritmus pre náhodný počet bodov

Ďalej si ukážeme Metropolisov- Hastingsov algoritmus na simuláciu procesu z nenormalizovanej hustoty h vzhľadom k Poissonovmu procesu. Označme $N_f = \{x \subset B : n(x) < \infty\}$. Pre $x \in N_f$ buď $p(x)$ daná pravdepodobnosť pre pridanie bodu ξ , ak x je súčasný stav reťazca a buď $q_b(x, \cdot)$ daná hustota na B pre návrh na umiestnenie bodu ξ . Ak $x = \emptyset$, tak s pravdepodobnosťou $1 - p(x)$ nerobíme nič, zatiaľčo ak $x \neq \emptyset$ buď $q_d(x, \cdot)$ daná diskretná hustota na x pre výber bodu $\eta \in x$, ktorý je navrhnutý na zánik. Pre návrh zrodenia je pravdepodobnosť prijatia návrhu, že sa zo stavu x dostaneme do stavu $x \cup \xi$ rovna

$$\alpha_b(x, \xi) = \min\{1, r_b(x, \xi)\},$$

kde $r_b(x, \xi)$ je Hastingsov pomer

$$r_b(x, \xi) = \frac{h(x \cup \xi)(1 - p(x \cup \xi))q_d(x \cup \xi, \xi)}{h(x)p(x)q_b(x, \xi)}.$$

Pre návrh zániku je pravdepodobnosť prijatia návrhu, že sa zo stavu x dostaneme do stavu $x \setminus \eta$ rovna

$$\alpha_d(x, \eta) = \min\{1, r_d(x, \eta)\},$$

kde $r_d(x, \eta)$ je Hastingsov pomer

$$r_d(x, \eta) = \frac{h(x \setminus \eta)p(x \setminus \eta)q_b(x \setminus \eta, \eta)}{h(x)(1 - p(x))q_d(x, \eta)}.$$

V oboch pomeroch berieme pre $a \geq 0$, že $a/0 = 1$. Tento algoritmus vytvára Markovov reťazec Y_0, Y_1, \dots ak Y_0 je dané. Môže to byť napríklad Poissonov proces alebo $Y_0 = \emptyset$.

Algoritmus 3.2.1. *Metropolisov- Hastingsov algoritmus zrodenia a zániku:* Pre $m = 1, 2, \dots$ nech sa nachádzame v stave $Y_m = x \in N_f$. Stav Y_{m+1} vytvorme následovne:

(i) vygenerujeme $R'_m \sim \text{Uniform}([0,1])$ a $R''_m \sim \text{Uniform}([0,1])$;

(ii) ak $R'_m \leq p(x)$, tak generujeme $\xi_m \sim q_b(x, \cdot)$ a položíme

$$Y_{m+1} = \begin{cases} x \cup \xi_m & \text{pre } R''_m \leq r_b(x, \xi_m) \\ x & \text{inak;} \end{cases}$$

(iii) ak $R'_m > p(x)$ potom

(a) ak $x = \emptyset$, tak položíme $Y_{m+1} = x$

(b) inak generujeme $\eta_m \sim q_d(x, \cdot)$ a položíme

$$Y_{m+1} = \begin{cases} x \setminus \eta_m & \text{pre } R''_m \leq r_d(x, \eta_m) \\ x & \text{inak;} \end{cases}$$

Veličiny R'_m, R''_m a ξ_m alebo η_m sú navzájom podmienené nezávislé na náhodných veličinách vytvorených pri generovaní (Y_0, \dots, Y_m) .

Prirodzený priestor stavov je $E = \{x \in N_f : h(x) > 0\}$. Všimnime si, že ak $x, x \setminus \eta \in E$, tak $r_d(x, \eta) = \frac{1}{r_b(x \setminus \eta, \eta)}$. Hastingsove pomery r_b, r_d závisia na h prostredníctvom Papangelouovej podmienenej intenzity a teda ak je h markovská, tak závisia iba na lokálnej informácii.

Reťazec $\{Y_m\}$ je reverzibilný a nerozložiteľný. Ak $Y_0 \in E$, $p(\emptyset) < 1$ a ak pre každé $x \in E$ také, že $x \neq \emptyset$, existuje $\eta \in x$ tak, že $(1 - p(x))q_d(x, \eta) > 0$ a $h(x \setminus \eta)p(x \setminus \eta)q_b(x \setminus \eta, \eta) > 0$, potom reťazec $\{Y_m\}$ konverguje v distribúcii k X .

3.3 Konvergencia a vlastnosti Markovových reťazcov

Majme obecný priestor stavov Ω vybavený σ -algebrou a rozdelenie pravdepodobnosti Π definované na Ω . V mnohých prípadoch vieme zkonštruovať

pomocou MCMC algoritmov časovo-homogénny markovov reťazec Y_0, Y_1, \dots so stavovým priestorom Ω tak, že $P^m(x, F)$ konverguje k cieľovému rozdeleniu $\Pi(F)$, pre $F \subseteq \Omega, x \in \Omega$, kde

$$P^m(x, F) = P(Y_m \in F | Y_0 = x)$$

je *pravdepodobnosť prechodu m-tého rádu*. Časová homogenita znamená, že prechodové jadro $P(x, F) = P(Y_{m+1} \in F | Y_m = x)$ nezávisí na $m \in \mathbb{N}_0$. Teda ak máme časovo-homogénny reťazec a zároveň je splnená markovská vlastnosť, tak rozdelenie (Y_0, \dots, Y_m) je pre každé $m \in \mathbb{N}$ určené rozdelením Y_0 , ktoré budeme nazývať *počiatočné rozdelenie*. Poznamenajme, ešte, že konvergencia pravdepodobnosti prechodu m-tého rádu implikuje, že ak $Y_0 \sim \Pi$, tak potom aj $Y_m \sim \Pi$ pre každé $m \in \mathbb{N}_0$. To znamená, že MCMC algoritmy sú prirodzene vytvorené tak, aby Π bolo stacionárne rozdelenie (t.j. ak $Y_m \sim \Pi$, tak aj $Y_{m+1} \sim \Pi$). V mnohých prípadoch nám algoritmus vytvára reverzibilné reťazce vzhľadom k Π a to nám dáva stacionaritu. Inak povedané, ak $Y_m \sim \Pi$, tak (Y_m, Y_{m+1}) a (Y_{m+1}, Y_m) sú rovnako rozdelené, teda platí, že pre $F, G \subseteq \Omega$

$$P(Y_m \in F, Y_{m+1} \in G, Y_m \neq Y_{m+1}) = P(Y_{m+1} \in F, Y_m \in G, Y_m \neq Y_{m+1}).$$

Z toho nakoniec dostaneme, že

$$P(Y_{m+1} \in F) = P(Y_m \in \Omega, Y_{m+1} \in F) = P(Y_{m+1} \in \Omega, Y_m \in F) = \Pi(F).$$

Definícia 3.3.1. Reťazec je Ψ -nerozložiteľný, ak existuje nenulová miera Ψ na Ω taká, že pre všetky $x \in \Omega$ a všetky $F \subseteq \Omega : \Psi(F) > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$, že $P^m(x, F) > 0$.

Definícia 3.3.2. Markovov reťazec nazveme *nenulový*, ak je Ψ -nerozložiteľný a ak v ňom existuje stacionárne rozdelenie.

Definícia 3.3.3. Markovov reťazec $\{Y_n\}$ je *periodický*, ak existuje $q \in \mathbb{N}, q > 1$ a neprázdne disjunktné množiny $A_0, \dots, A_{q-1}, A_q = A_0$ také, že $P(x, A_{i+1}) = 1$ pre každé $x \in A_i, i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

V opačnom prípade je $\{Y_n\}$ *neperiodický*.

Definícia 3.3.4. Hovoríme, že množina F je *harrisovsky trvalá*, ak pre každé $x \in F$ je

$$P(\exists m \in \mathbb{N} : Y_m \in F | Y_0 = x) = 1.$$

Reťazec nazývame *harrisovsky trvalý*, ak je Ψ -nerozložiteľný a každá $F \subseteq \Omega$ taká, že $\Psi(F) > 0$ je harrisovsky trvalá množina.

Definícia 3.3.5. Nech reťazec $\{Y_m\}$ je harrisovsky trvalý, neperiodický a nenulový, potom sa nazýva *ergodický*.

Definícia 3.3.6. Hovoríme, že ergodický reťazec $\{Y_m\}$ je *geometricky ergodický*, ak existuje $r \in [0, 1)$ a reálna merateľná funkcia M na Ω taká, že

$$\sup_{A \in \Omega} |P^n(x, A) - \Pi(A)| \leq M(x)r_n,$$

pre každé $x \in \Omega$ a $n \in \mathbb{N}$.

Tvrdenie 3.3.7. Nech $\{Y_m\}$ je geometricky ergodický Markovov reťazec so stacionárnym rozdelením Π , a nech k je reálna funkcia na Ω taká, že buď $E|k(X)|^{2+\varepsilon} < \infty$ pre nejaké $\varepsilon > 0$ alebo $\{Y_m\}$ je reverzibilný a $Ek(X)^2 < \infty$. Potom $\sqrt{n}(\bar{k}_n - \Pi(k))$ konverguje v distribúcii k $N(0, \sigma^2)$ pre $n \rightarrow \infty$, kde za predpokladu, že $Y_0 \sim \Pi$ je

$$\sigma^2 = \text{var } k(Y_0) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \text{cov}(k(Y_0), k(Y_i)).$$

σ^2 je správne definované a konečné bez ohľadu na počiatočné rozdelenie.

Dôkaz. V prípade, že $E|k(X)|^{2+\varepsilon} < \infty$ pre nejaké $\varepsilon > 0$ dôkaz môžeme nájsť v [2].

Ak je $\{Y_n\}$ a $Ek(X)^2 < \infty$, tak dôkaz je uvedený v [3].

□

3.4 Simulácie bodových procesov

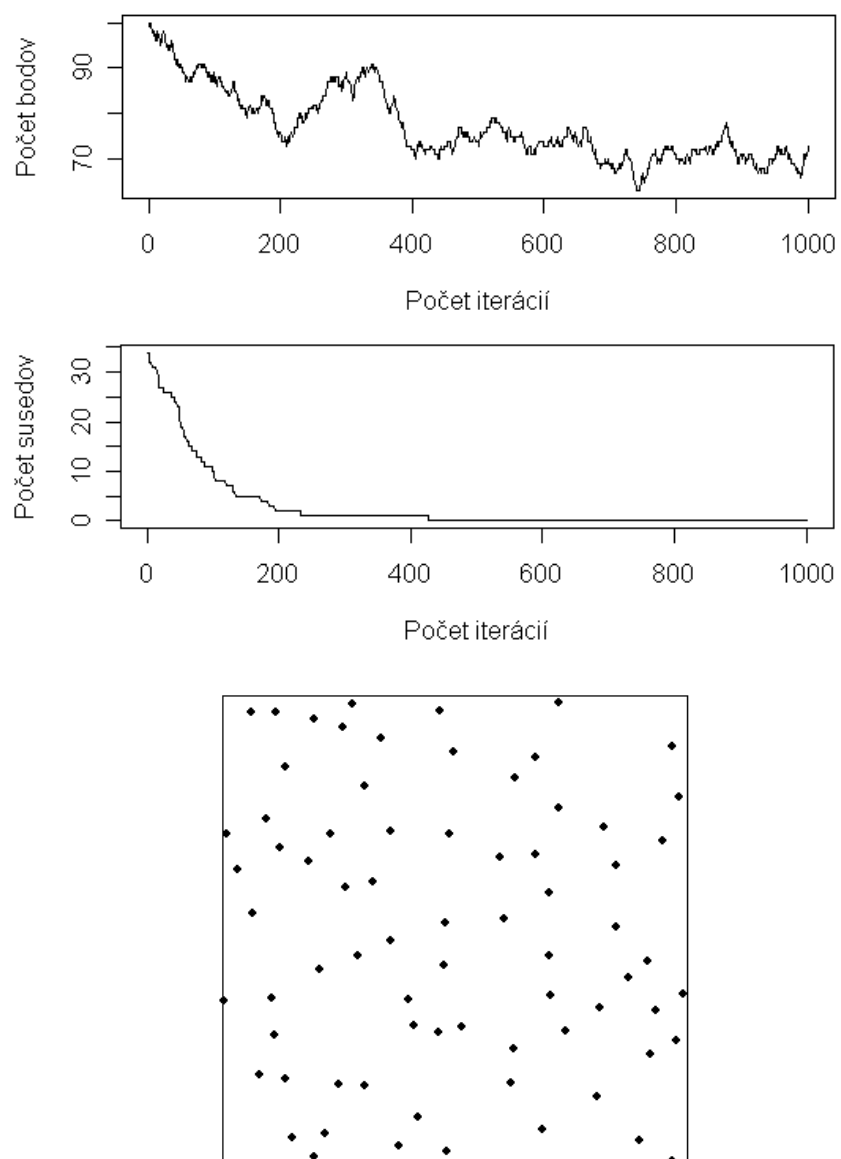
V tejto časti si ukážeme konkrétne simulácie pomocou Metropolisovho- Hastingsovho algoritmu zrodenia a zániku. Budeme simulovať Straussov proces pre rôzne hodnoty parametrov γ a R , pričom $\beta = 1.5$ zvolíme pevne. Počiatočný počet bodov nech je 100 a pravdepodobnosť návrhu s prijatým bodom, nech je $1/2$. Počiatočný stav Y_0 generujeme ako rovnomerné rozdelenie sto bodov v okne $[0, 10] \times [0, 10]$.

Zvolme najprv $\gamma = 0$, $R = 0.5$ a algoritmus zastavme po tisícej iterácií. Vidíme, že v tomto prípade je počet susedov na konci simulácie rovný nule. To znamená, že body sú od seba vzdialené aspoň $R = 0.5$, čo odpovedá procesu s pevným jadrom.

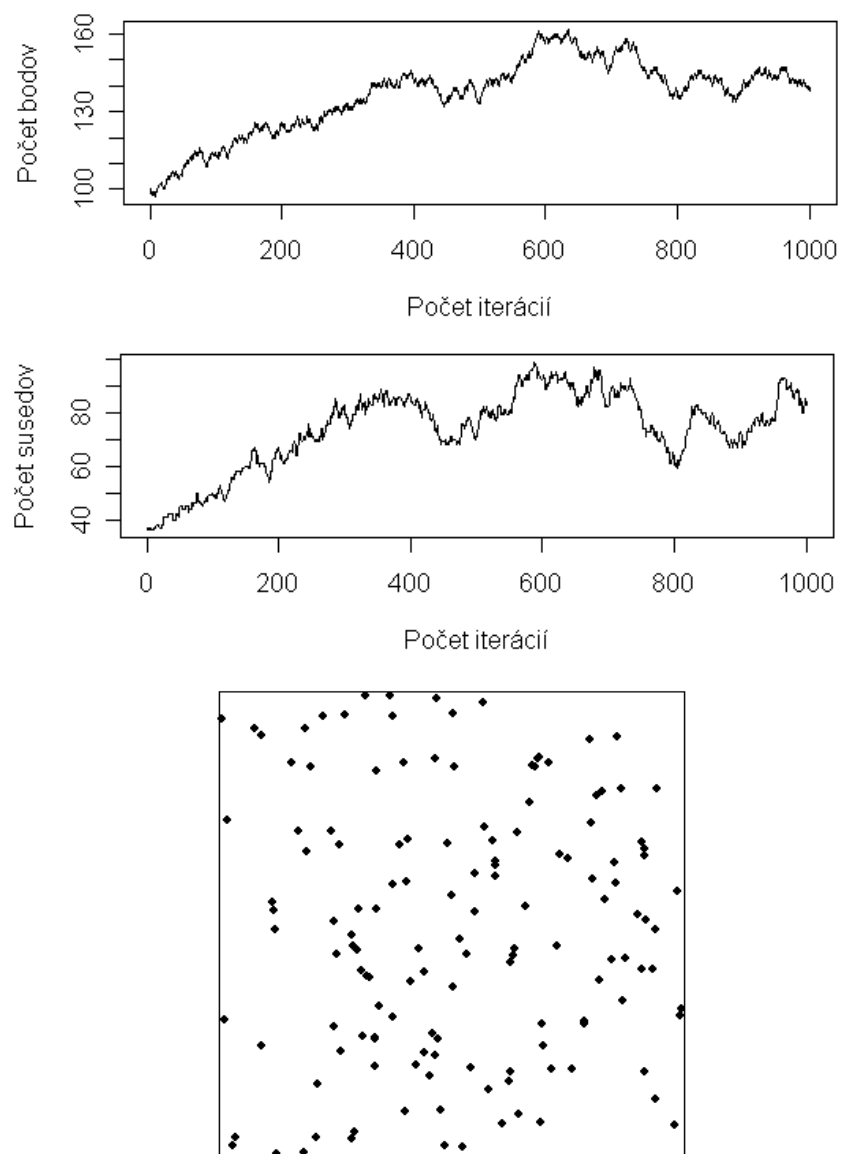
Pri voľbe $\gamma = 1$ a $R = 0.5$ sú body simulovaného procesu aj blízko seba aj ďaleko. Proces odpovedá Poissonovmu procesu, kde nenastávajú žiadne interakcie medzi bodmi.

Ak zvolíme $\gamma = 3000$, $R = 0.2$ a simuláciu zastavíme po 1500 krokoch, tak počet bodov stále narastá a začínajú sa tvoriť zhluky bodov.

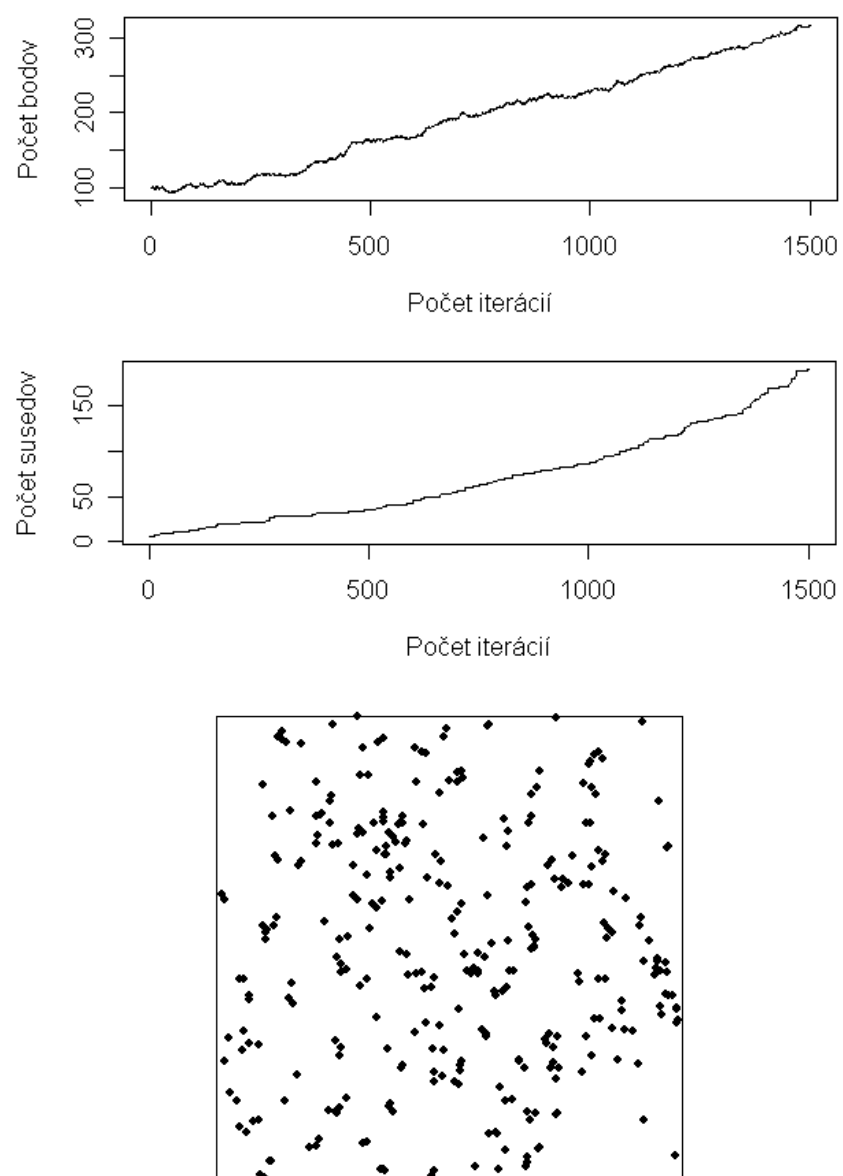
Výsledky týchto simulácií vidíme na nasledujúcich stránkach. Prvý graf znázorňuje závislosť počtu bodov na počte iterácii, druhý počet susedov taktiež v závislosti na počte iterácií. Dole je nakoniec znázornená realizácia Straussovho procesu pre rôzne hodnoty parametrov pomocou Metropolisovho- Hastingsovho algoritmu.



Obrázok 3.1: $\gamma = 0, R = 0.5$



Obrázok 3.2: $\gamma = 1, R = 0.5$



Obrázok 3.3: $\gamma = 3000, R = 0.2$

Literatúra

- [1] Moeller J., Waagepetersen R.P., *Statistical Inference and Simulation for Point Processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, 2004.
- [2] Chan, K. S. a Geyer, C. J.: *Discussion of the paper ‘Markov chains for exploring posterior distributions’ by Luke Tierney*, *Annals of Statistics* **22** (1994) 1747–1747.
- [3] Roberts, G. O. a Rosenthal, J. S.: *Geometric ergodicity and hybrid Markov chains*, *Electronic Communications, Probability* **2** (1997) 13–25.